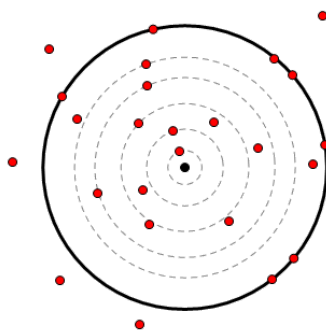


第3讲 与圆有关的位置关系

一、点与圆的位置关系

思考：在飞镖游戏中，我们根据飞镖落到靶上不同的位置计算成绩，如果把靶抽象为一个圆，飞镖的落点抽象为一个点，那么这个点和这个圆有几种位置关系呢？



【备注】 根据图片可以引导学生分析出点和圆的三种位置，即点在圆外，正好落在圆周上，或落在圆内。

点和圆的位置关系：

位置关系	图形	定义	性质及判定
点在圆 <u>外</u>		点在圆的 <u>外部</u>	$d > r \Leftrightarrow$ 点P在 $\odot O$ 的外部
点在圆 <u>上</u>		点在 <u>圆周上</u>	$d = r \Leftrightarrow$ 点P在 $\odot O$ 上
点在圆 <u>内</u>		点在圆的 <u>内部</u>	$d < r \Leftrightarrow$ 点P在 $\odot O$ 的内部

【备注】 判断点与圆的位置关系，关键是找到并求出点与圆心的连线段的长度，然后再与半径进行大小比较.这种通过比较线段的长度来确定位置关系的方法在后面判断直线与圆的位置关系

时也会用到。

在平面直角坐标系中求解线段长可能会涉及到两点间的距离公式：

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

🧠 举个“栗”子

栗子1

1. 已知点 P 在 $\odot O$ 的内部， $\odot O$ 的半径为10cm，那么点 P 到 $\odot O$ 的距离可以是（ ）。

- A. 9cm B. 10cm C. 11cm D. 12cm

【备注】 点在圆内则点 P 到圆心 O 的距离小于半径

【答案】 A

【解析】 $\because$ 点 P 在 $\odot O$ 的内部，

$$\therefore OP < 10 .$$

故选：A .

【标注】 【知识点】 已知点和圆的位置关系，求半径

2. 已知 $\odot O$ 的半径为1，点 A 到圆心的 O 的距离为 a ，若关于 x 的方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 不存在实数根，则点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是（ ）。

- A. 点 A 在 $\odot O$ 内 B. 点 A 在 $\odot O$ 上 C. 点 A 在 $\odot O$ 外 D. 无法确定

【备注】 与一元二次方程结合，方程无解即 $\Delta < 0$ ，求出 a 的取值范围和和半径比大小

【答案】 C

【解析】 $x^2 - 2x + a = 0$ 不存在实数根，

$$\therefore \Delta = 4 - 4a < 0 ,$$

$$\therefore a > 1 ,$$

$\therefore$ 点 A 在 $\odot O$ 外 .

故选C .

【标注】 【知识点】 点与圆的位置关系

3. $\odot O$ 的半径为 R ，圆心到点 A 的距离为 d ，且 R 、 d 分别是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两根，则点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是（ ）。

A. 点 A 在 $\odot O$ 内部

B. 点 A 在 $\odot O$ 上

C. 点 A 在 $\odot O$ 外部

D. 点 A 不在 $\odot O$ 上

【备注】此题需要分类讨论 R 与 d 的值，然后根据点到圆心的距离与半径的大小确定关系

【答案】 D

【解析】解方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两根，得 $R = 2$ 或 4 ， $d = 4$ 或 2 ，

当 $R = 2$ ， $d = 4$ 时，点 A 在 $\odot O$ 外部．

当 $R = 4$ ， $d = 2$ 时，点 A 在 $\odot O$ 内部．

综上所述，点 A 不在 $\odot O$ 上．

故选：D．

【标注】【知识点】点与圆的位置关系

栗子2

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果 $\odot O$ 是以原点 $O(0,0)$ 为圆心，5为半径的圆，那么点 $A(-3,-4)$ 与 $\odot O$ 的位置关系是（ ）．

A. 在 $\odot O$ 内

B. 在 $\odot O$ 上

C. 在 $\odot O$ 外

D. 不能确定

【备注】利用两点间距离公式求出 AO 的长，然后与半径比大小

【答案】 B

【解析】 $\because OA = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5 = r$ ，

$\therefore$ 点 A 在 $\odot O$ 上．

【标注】【知识点】点与圆的位置关系

栗子3

5. 平面内一点 P 离 $\odot O$ 上的点最近距离为5cm，离 $\odot O$ 上的点最远距离为13cm，则 $\odot O$ 的半径为（ ）．

A. 4cm

B. 4或9cm

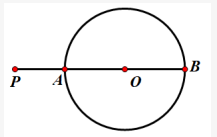
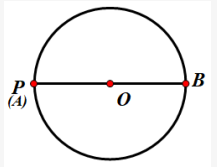
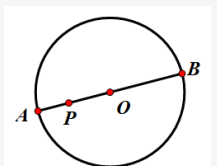
C. 8cm

D. 8或18cm

【备注】通过已知条件可得点 P 可能在圆内也可能在圆外，画图分类讨论，利用“一箭穿心”的思想，连接 P 、 O ，找出距离最近和最远的点求解

“一箭穿心”的思想在后续求解圆中最值问题还会用到，在这部分可以做好铺垫

平面上的点与圆上的点间的最大、最小距离与圆的半径之间的关系，如下表所示：

位置关系	示意图	距离	半径
点在圆外		最大距离： PB 最小距离： PA	$\frac{PB - PA}{2}$
点在圆上		最大距离： PB 最小距离：0	$\frac{PB}{2}$
点在圆内		最大距离： PB 最小距离： PA	$\frac{PA + PB}{2}$

【答案】 B

【解析】 点 P 应分为位于圆的内部与外部两种情况讨论：

① 如图1，当点 P 在圆内时，

最近点的距离为 5cm ，

最远点的距离为 13cm ，

则直径是 $5 + 13 = 18\text{cm}$ ，

因而半径是 9cm ；

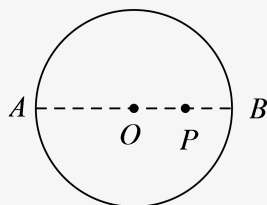


图1

② 如图2，当点 P 在圆外时，

最近点的距离为 5cm ，

最远点的距离为 13cm ，

则直径是 $13 - 5 = 8\text{cm}$ ，

因而半径是 4cm 。

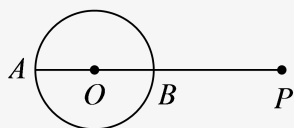


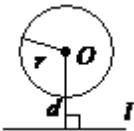
图2

故选B。

【标注】 【知识点】 已知点和圆的位置关系，求半径

二、 直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系：设 $\odot O$ 的半径为 R ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，则直线和圆的位置关系如下表：

位置关系	图形	定义	性质及判定
<u>相离</u>		直线与圆 <u>没有</u> 公共点 .	$d > r \Leftrightarrow$ 直线与 $\odot O$ <u>相离</u>
<u>相切</u>		直线与圆有 <u>唯一</u> 公共点, 直线叫做圆的切线, 唯一公共点叫做 <u>切点</u> .	$d = r \Leftrightarrow$ 直线与 $\odot O$ <u>相切</u>
<u>相交</u>		直线与圆有 <u>两个</u> 公共点, 直线叫做圆的割线 .	$d < r \Leftrightarrow$ 直线与 $\odot O$ <u>相交</u>

【备注】 ①要明确直线与圆有唯一公共点的含义, 是**有且只有一个公共点**, 避免出现“直线和圆有一个公共点就是直线与圆相切”的错误 .

②若把上述的直线改为“线段”或者“射线”时需要注意分情况讨论 . 如下图, 都是射线和圆只有一个交点, 但是只有第二个图是射线与圆相切 .



 举个“栗”子

 栗子4

6. 已知圆的直径是13cm, 圆心到某条直线的距离是6cm, 那么这条直线与该圆的位置关系是 _____ .

【备注】 圆的半径为6.5cm, 由 $6 < 6.5$ 可得直线与圆相交

【答案】 相交

【解析】 $\because$ 圆的直径为13cm ,
 $\therefore$ 圆的半径为6.5cm ,
 $\because$ 圆心到直线的距离6cm ,
 $\therefore$ 圆的半径 > 圆心到直线的距离 ,

$\therefore$ 直线与圆相交，

故答案为：相交．

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

栗子5

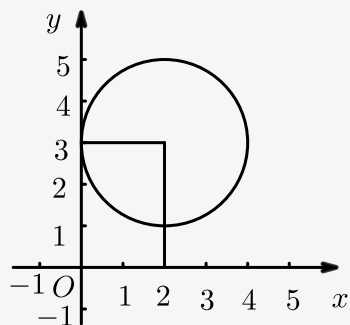
7. 在平面直角坐标系中，以点 $(2, 3)$ 为圆心， 2 为半径的圆必定（ ）．

- A. 与 x 轴相离、与 y 轴相切
- B. 与 x 轴、 y 轴都相离
- C. 与 x 轴相切、与 y 轴相离
- D. 与 x 轴、 y 轴都相切

【备注】圆心 $(2, 3)$ 到 x 轴的距离为 3 ，到 y 轴的距离为 2 ，分别和半径比较大小判断

【答案】A

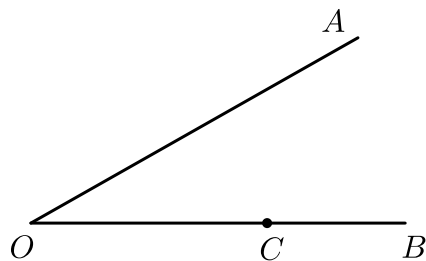
【解析】如图所示，在平面直角坐标系中，以点 $(2, 3)$ 为圆心， 2 为半径的圆必定与 x 轴相离、与 y 轴相切．



【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

栗子6

8. 如图， $\angle O = 30^\circ$ ， C 为 OB 上一点，且 $OC = 6$ ，以点 C 为圆心，半径为 3 的圆与 OA 的位置关系是（ ）．

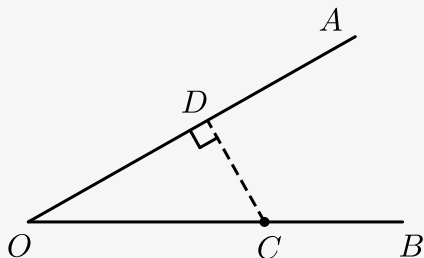


- A. 相离
- B. 相交
- C. 相切
- D. 以上三种情况均有可能

【备注】判断直线与圆的位置关系需要用圆心到直线的距离与半径比较大小；过点 C 作 $CD \perp OA$ 求 CD 然后判断

【答案】 C

【解析】过点 C 作 $CD \perp AO$ 于点 D ,



$$\because \angle O = 30^\circ, OC = 6,$$

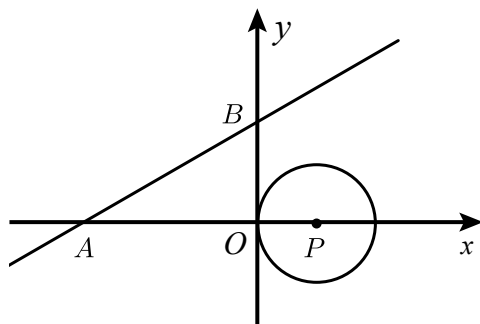
$$\therefore DC = 3,$$

$\therefore$ 以点 C 为圆心, 半径为3的圆与 OA 的位置关系是: 相切.

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

独步天下

9. 如图, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点, 圆心 P 的坐标为 $(1, 0)$, 圆 P 与 y 轴相切于点 O . 若将圆 P 沿 x 轴向左移动, 当圆 P 与直线相交时, 横坐标为整数的点 P 的个数是 ().



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【备注】由一次函数可得 $\angle BAO = 30^\circ$ (利用 $OB = \frac{1}{2}AB$ 求解);
随着圆 P 向右移动, 圆会先与直线相切然后才会相交, 因此求出相切的临界情况判断

【答案】 B

【解析】若圆和直线相切, 则圆心到直线的距离应等于圆的半径1,

据直线的解析式求得 $A(-3, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$,

$$\text{则} \tan \angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以 $\angle BAO = 30^\circ$,

所以当相切时, $AP = 2$,

点 P 可能在点 A 的左侧或右侧.

所以圆 P 与直线相交时, $AP < 2$,

此时横坐标为整数的点 P 有 $(-2, 0)$, $(-3, 0)$, $(-4, 0)$ 三个.

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

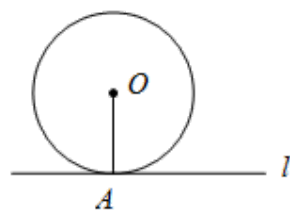
三、切线的性质与判定

1. 切线的判定定理

如图, 在 $\odot O$ 中, 经过半径 OA 的外端点 A 作直线 $l \perp OA$, 则圆心 O 到直线 l 的距离是线段 OA 即 半径, 所以可以得到直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是相切.

这样我们就得到了切线的判定定理:

经过 半径 的 外端 并且 垂直 于这条 半径 的 直线 是圆的切线.



【备注】！注意：

定理中的“经过半径外端”和“垂直于这条半径”这两个条件缺一不可.

如图：图1经过半径外端但不垂直，图2垂直却不经过半径外端，所以图中的两条线都不是圆的切线.

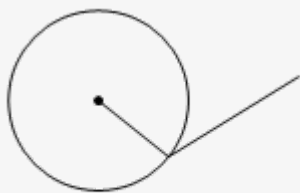


图1

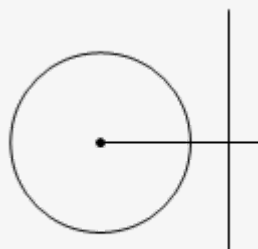


图2

！总结：

①判断切线的常用方法：

- (1) 定义法：和圆只有 一个 公共点的直线是圆的切线；
- (2) 距离法：和圆心距离等于 半径 的直线是圆的切线；
- (3) 判定定理：经过半径的 外端 并且 垂直 于这条半径的直线是圆的切线.

②证明一条直线是圆的切线有两个思路：

(1) 若给出直线与圆有公共点：连半径、证垂直；

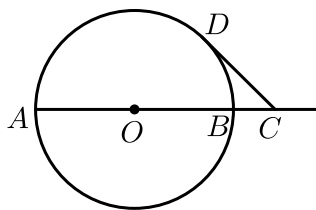
(2) 若没给直线与圆的交点：作垂直、证半径。

举个“栗”子

连半径证垂直

栗子7

10. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB = 4$ ，点 C 在线段 AB 的延长线上，点 D 在 $\odot O$ 上，连接 CD ，且 $CD = OA$ ， $OC = 2\sqrt{2}$ 。求证： CD 是 $\odot O$ 的切线。



【备注】 $\because D$ 点在圆上， $\therefore$ 连 OD ，证 $\angle ODC = 90^\circ$ ；

此题利用勾股定理逆定理直接证明直角

【答案】证明见解析。

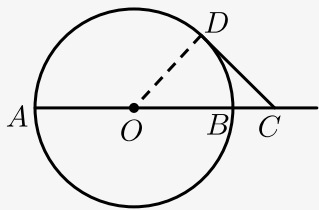
【解析】连接 OD ，由题意可知 $CD = OD = OA = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

$$\therefore OD^2 + CD^2 = OC^2.$$

$\therefore \triangle OCD$ 为直角三角形，则 $OD \perp CD$ 。

又 $\because$ 点 D 在 $\odot O$ 上，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线。



【标注】【知识点】切线的判定定理

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 AC 边上的一点，且 $AE = AB$ ， $\angle BAC = 2\angle CBE$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，交 BE 于点 F 。

$$(2) S_{\text{四边形}ACDE} = 8\sqrt{3}.$$

【解析】(1) $\because D$ 为 $\widehat{AC}$ 的中点，

$$\therefore OD \perp AC,$$

$$\because AC \parallel DE,$$

$$\therefore OD \perp DE,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 连接 DC ,

$\because D$ 为 $\widehat{AC}$ 的中点，

$$\therefore OD \perp AC, AF = CF,$$

$$\because AC \parallel DE, \text{ 且 } OA = AE$$

,

$\therefore F$ 为 OD 的中点，即

$$OF = FD,$$

在 $\triangle AFO$ 和 $\triangle CFD$ 中，

$$\begin{cases} AF = CF \\ \angle AFO = \angle CFD \\ OF = FD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFO \cong \triangle CFD (\text{SAS}),$

$$\therefore S_{\triangle AFO} = S_{\triangle CFD},$$

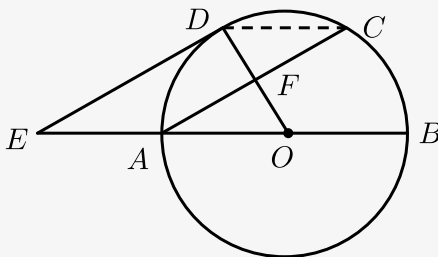
$$\therefore S_{\text{四边形}ACDE} = S_{\triangle ODE}.$$

在 $Rt\triangle ODE$ 中， $OD = OA = AE = 4$,

$$\therefore OE = 8,$$

$$\therefore DE = \sqrt{OE^2 - OD^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACDE} = S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \times OD \times DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

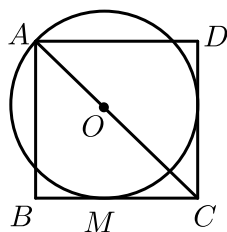


【标注】【知识点】圆与全等

栗子8

作垂直、证半径

13. 如图， O 为正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，以 O 为圆心， OA 长为半径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 M 。



(1) 求证： CD 与 $\odot O$ 相切．

(2) 若 $\odot O$ 的半径为1，求正方形 $ABCD$ 的边长．

【备注】 线段 CD 无圆上的点（即没有切点），因此需要作垂直证半径

【答案】 (1) 证明见解析．

$$(2) \frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

【解析】 (1) 过 O 作 $ON \perp CD$ 于 N ，连接 OM ，

$\because \odot O$ 与 BC 相切于点 M ，

$\therefore OM \perp BC$ ．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ．

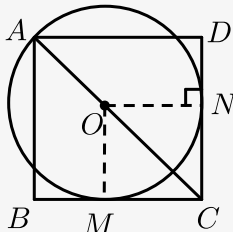
$\therefore AB \parallel OM \parallel DC$ ．

$\because AC$ 为正方形 $ABCD$ 对角线，

$\therefore \angle NOC = \angle NCO = \angle MOC = \angle MCO = 45^\circ$ ．

$\therefore OM = ON$ ，

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切．



(2) 由(1)易知 $\triangle MOC$ 为等腰直角三角形， OM 为半径，

$$\therefore OM = MC = 1.$$

$$\therefore OC^2 = OM^2 + MC^2 = 1 + 1 = 2.$$

$$\therefore OC = \sqrt{2}.$$

$$\therefore AC = AO + OC = 1 + \sqrt{2}.$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，

$$\text{有 } AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

$$\therefore 2AB^2 = AC^2.$$

$$\therefore AB = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}.$$

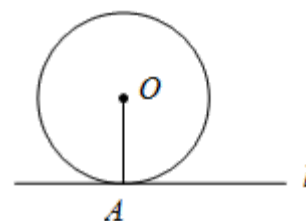
故正方形 $ABCD$ 的边长为 $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ ．

【标注】 【知识点】 圆与勾股

2. 切线的性质

思考：

如图，如果直线 l 是 $\odot O$ 的切线，切点为 A ，那么半径 OA 与直线 l 是不是一定垂直呢？



切线性质定理：圆的切线垂直于过切点的半径。

推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点。

推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

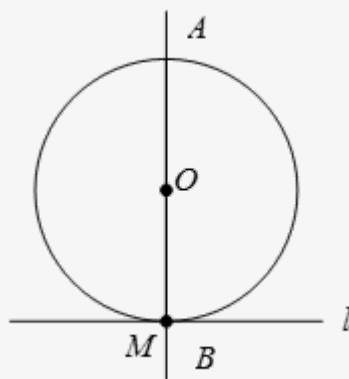
【备注】！注意：

这个定理共有三个条件，即一条直线满足：①垂直于切线②过切点③过圆心；中的两个，则一定满足第三个。

①过圆心，过切点 $\Rightarrow$ 垂直于切线。AB过圆心，AB切点M，则 $AB \perp l$ 。

②过圆心，垂直于切线 $\Rightarrow$ 过切点。AB过圆心， $AB \perp l$ ，则AB过切点M。

③过切点，垂直于切线 $\Rightarrow$ 过圆心。AB $\perp l$ ，AB过切点M，则AB过圆心。

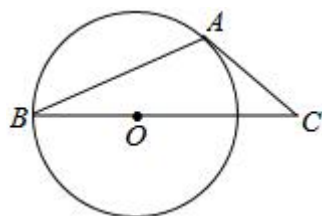


思路总结：见到切线，连半径，得垂直

举个“栗”子

栗子9

14. 如图，AB是 $\odot O$ 的弦，AC是 $\odot O$ 的切线，A为切点，BC经过圆心，若 $\angle B = 25^\circ$ 。则 $\angle C$ 的大小等于（ ）。



A. 20°

B. 25°

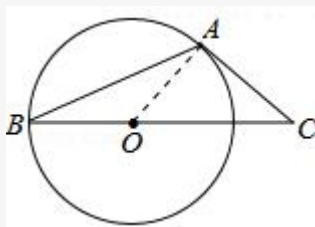
C. 40°

D. 50°

【答案】C

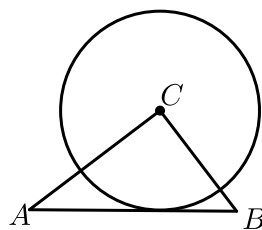
【解析】连接 AO ， AC 是 $\odot O$ 的切线，

$$\angle OAC = 90^\circ, OA = OB, \angle B = \angle OAB = 25^\circ, \angle AOC = 50^\circ, \angle C = 40^\circ.$$



【标注】【知识点】切线的性质定理

15. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$ ，以点 C 为圆心的圆与 AB 相切，则 $\odot C$ 的半径为（ ）。



A. 2.3

B. 2.4

C. 2.5

D. 2.6

【答案】B

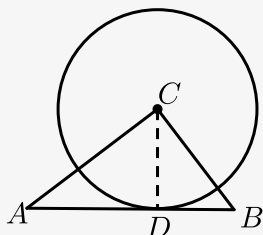
【解析】在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because AB = 5, BC = 3, AC = 4,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

如图：设切点为 D ，连接 CD ，



$\because AB$ 是 $\odot C$ 的切线，

$$\therefore CD \perp AB,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$\therefore AC \cdot BC = AB \cdot CD,$$

即 $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$,
 $\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{12}{5}$.
 故选 B .

【标注】【知识点】切线的性质定理

【能力】推理论证能力

栗子10

16. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 与 AB 相交， $\angle BAC = 38^\circ$.

(1) 如图①，若 D 为 $\widehat{AB}$ 的中点，求 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的大小 .

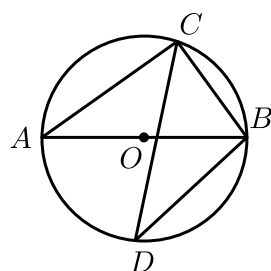


图 ①

(2) 如图②，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，与 AB 的延长线交于点 P ，若 $DP \parallel AC$ ，求 $\angle OCD$ 的大小 .

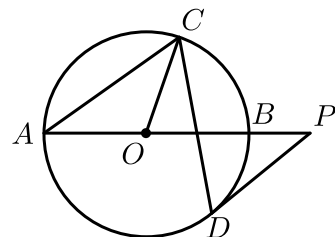


图 ②

【答案】(1) $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$.

(2) $\angle OCD = 26^\circ$.

【解析】(1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 38^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ ,$$

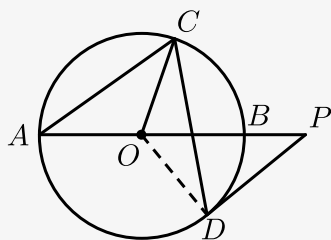
$$\because D \text{ 为 } \widehat{AB} \text{ 的中点 ,}$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD} ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 45^\circ .$$

(2) 如图, 连接 OD ,



$\because OP$ 切 $\odot O$ 于点 D ,

$\therefore OD \perp DP$,

即 $\angle ODP = 90^\circ$,

$\because DP \parallel AC$,

$\therefore \angle BAC = 38^\circ$,

$\therefore \angle P = \angle BAC = 38^\circ$,

$\because \angle AOD$ 是 $\angle ODP$ 的外角 ,

$\therefore \angle AOD = \angle ODP + \angle P = 128^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 64^\circ$,

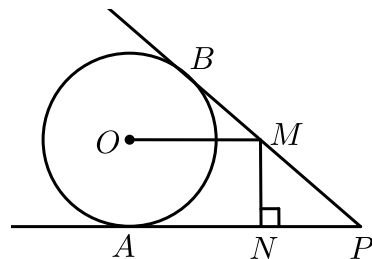
又 $\because OA = OC$,

$\therefore \angle ACO = \angle A = 38^\circ$,

$\therefore \angle OCD = \angle ACD - \angle ACO = 64^\circ - 38^\circ = 26^\circ$.

【标注】【知识点】圆与特殊角

17. 如图, PA 、 PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 、 B , 点 M 在 PB 上, 且 $OM \parallel AP$, $MN \perp AP$, 垂足为 N .



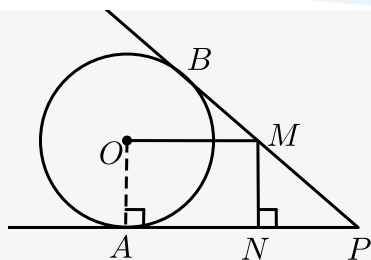
(1) 求证: $OM = AN$.

(2) 若 $\odot O$ 的半径 $R = 3$, $PA = 9$, 求 OM 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $OM = 5$.

【解析】 (1) 如图, 连接 OA , 则 $OA \perp AP$,



$\because MN \perp AP,$

$\therefore MN \parallel OA.$

$\because OM \parallel AP,$

$\therefore$ 四边形 $ANMO$ 是平行四边形.

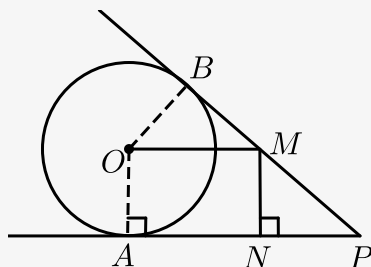
$\because OA \perp AP,$

$\therefore \angle OAP = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ANMO$ 是矩形,

$\therefore OM = AN.$

(2) 如图, 连接 OB , 则 $OB \perp BP$.



$\because OA = MN, OA = OB, OM \parallel AP.$

$\therefore OB = MN, \angle OMB = \angle NPM.$

$\therefore \angle OBM = \angle MNP = 90^\circ,$

$\therefore \triangle OBM \cong \triangle MNP,$

$\therefore OM = MP.$

设 $OM = x$, 则 $NP = 9 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle MNP$ 中, 有 $x^2 = 3^2 + (9 - x)^2$,

$\therefore x = 5$, 即 $OM = 5$.

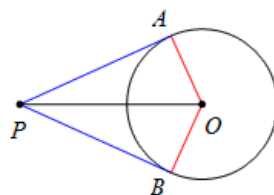
【标注】【知识点】圆与全等

3. 切线长定理

(1) **切线长**: 在经过圆外一点的圆的切线上, 这点和切点之间的 线段 的长, 叫这点到圆的切线长.

! 注意: 切线是直线, 切线长是线段长.

(2) **切线长定理**：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角．如图，已知 PA 、 PB 是圆的两条切线，则 $PA = PB$ 、 $\angle APO = \angle BPO$ ．



【备注】相关结论：

- ①圆的两条平行切线，切点间的线段是直径．
- ②圆外切四边形的两组对边和相等．

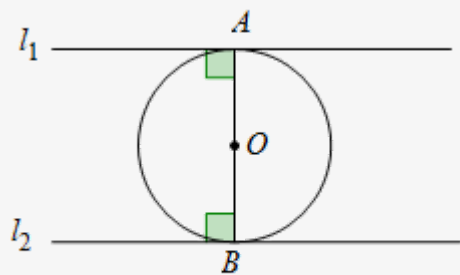


图1

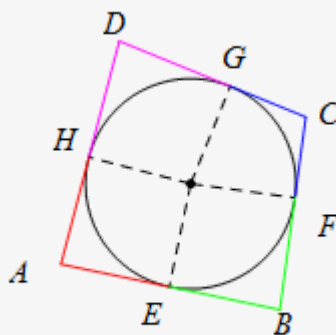


图2

- ③圆外切平行四边形是菱形．
- ④圆心和圆外这点的连线垂直平分两切点的连线．

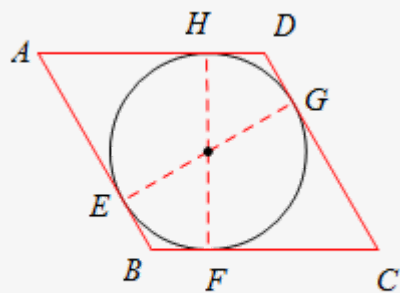


图3

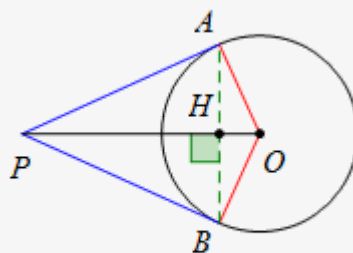
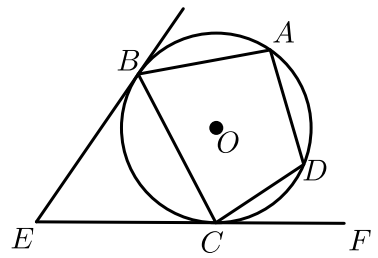


图4

栗子11

18. 如图： EB 、 EC 是 $\odot O$ 的两条切线， B 、 C 是切点， A 、 D 是 $\odot O$ 上两点，如果 $\angle E = 46^\circ$ ， $\angle DCF = 32^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是 _____ 度．



【答案】 99

【解析】 $\because EB, EC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore EB = EC,$$

$$\text{又} \because \angle E = 46^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle EBC = 67^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - (\angle BCE + \angle DCF) = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ADCB$ 内接于 $\odot O$,

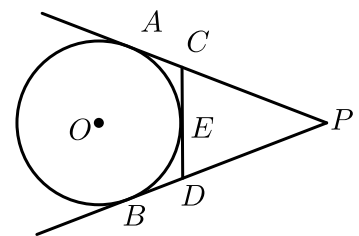
$$\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 99^\circ.$$

【标注】【知识点】切线长定理

栗子12

19. 如图， P 为 $\odot O$ 外一点， PA, PB 分别切 $\odot O$ 于 A, B ， CD 切 $\odot O$ 于点 E ，分别交 PA, PB 于点 C, D ，若 $PA = 5$ ，则 $\triangle PCD$ 的周长为（ ）。



A. 5

B. 7

C. 8

D. 10

【答案】 D

【解析】 $\because PA, PB$ 为圆的两条相交切线，

$$\therefore PA = PB,$$

同理可得： $CA = CE, DE = DB$ 。

$$\therefore \triangle PCD \text{ 的周长} = PC + CE + ED + PD,$$

$$\therefore \triangle PCD \text{ 的周长} = PC + CA + BD + PD = PA + PB = 2PA ,$$

$$\therefore \triangle PCD \text{ 的周长} = 10 .$$

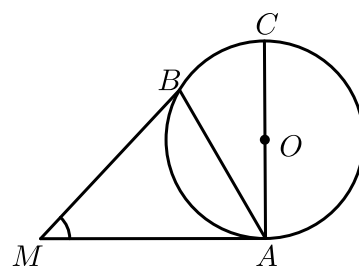
故选D .

【标注】【知识点】切线长定理

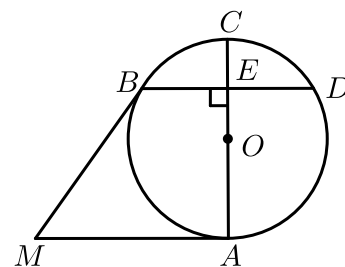
栗子13

20. 已知 $\odot O$ 中, AC 为直径, MA 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B .

(1) 如图, 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 求 $\angle AMB$ 的大小 .



(2) 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 D , 若 $BD = MA$, 求 $\angle AMB$ 的大小 .



【答案】 (1) 50° .

(2) 60° .

【解析】 (1) $\because MA$ 切 $\odot O$ 于点 A , 有 $\angle MAC = 90^\circ$.

$$\text{又 } \angle BAC = 25^\circ ,$$

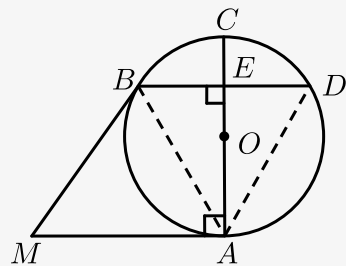
$$\therefore \angle MAB = \angle MAC - \angle BAC = 65^\circ .$$

$\because MA$ 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B ,

$$\therefore MA = MB , \text{ 有 } \angle MAB = \angle MBA .$$

$$\therefore \angle AMB = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 50^\circ .$$

(2) 如图, 连接 AD 、 AB .



$\because MA \perp AC$, 又 $BD \perp AC$,

$\therefore BD \parallel MA$.

又 $BD = MA$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是平行四边形 .

$\because MA = MB$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是菱形 , 有 $AD = BD$.

又 AC 为直径 , $AC \perp BD$, 得 $\widehat{AB} = \widehat{AD}$, 有 $AB = AD$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形 , 有 $\angle D = 60^\circ$.

$\therefore$ 在菱形 $MADB$ 中 , $\angle AMB = \angle D = 60^\circ$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】正多边形与圆

【知识点】圆内接四边形综合

【知识点】切线的性质定理